#### שאלה 1:

: נתון .

מעל מתקיים .

כמו כן מתקיים:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. קיום אופרטור צמוד יחיד | 1. נתון | 1. ב- יש לינאריות גם מימין |

קיבלנו כי מתקיים וגם מתקיים .

כלומר מתקיים:

לכן .

*: נתון לכל .*

מעל מתקיים , לכן .

ל- קיים אופרטור צמוד יחיד כך שמתקיים .

לכן מתקיים:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. לינאריות משמאל של מ"פ | 1. נתון | 1. קיום אופרטור צמוד יחיד |
|  |  |  |  |

קיבלנו כי מתקיים לכל , לכן בהכרח , לכן .

#### שאלה 2:

יהיו , אז מתקיים:

קיבלנו כי לכל מתקיים ואנחנו יודעים שקיים אופרטור צמוד יחיד המקיים , לכן קיבלנו ומיחידות מתקיים .

*למדנו כי אם סימטרי אז קיים בסיס א"נ המורכב מהו"ע של .*

*לכן נמצא את הו"ע והע"ע של .*

*תחילה נמצא את בבסיס הסטנדרטי .*

*לכן הע"ע הם . נמצא כעת את הו"ע:*

*עבור :*

*נקבל משוואה אחת:*

*נקבל משוואה שנייה: , נציב ונקבל , מכאן .*

*כלומר, , לכן הו"ע של הוא .*

*עבור :*

נקבל , לכן .

כלומר, , לכן הו"ע של הם: .

ניתן לראות שתחת המ"פ הסטנדרטית ב- מתקיים אבל .

לכן נצטרך להחליף את בו"ע שקול שגם ניצב ל-.

ננרמל תחילה את לקבלת : .

נמצא כעת את בעזרת גרם-שמידט.

מתקיים .

נגדיר

מתקיים , לכן .

נבדוק כי הוא ו"ע של ע"ע : .

לכן הבסיס הא"נ הוא הבסיס .

נמצא כעת את :

לכן קיבלנו: , כלומר אלכסונית.

#### שאלה 3:

**סעיף א':**

נתון כי יוניטרי, לכן הע"ע שלו הם .

נגדיר , , כלומר המרחבים העצמיים של הע"ע.

נתון כי הרמיטי, לכן ו"ע השייכים לע"ע שונים הם בת"ל, כלומר לכל מתקיים , לכן .

מתקיים גם , לכן לכל קיימים כך שמתקיים .

לכן מתקיים .

**סעיף ב':** ע"פ משפט שהוכח בהרצאה, אם יוניטרית אזי כל ע"ע מקיים .

באופן דומה, אם חיובית אזי כל ע"ע מקיים .

לכן קיבלנו כי כל ע"ע של מקיים .

חיובית, זה שקול ע"פ משפט לכך שמתקיים , כלומר הרמיטית.

לאופרטור הרמיטי קיים בסיס א"נ המורכב מהו"ע של , כלומר .

לכן כל הוא ק"ל של איברי בסיס , כלומר .

לכן מתקיים: .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. הגדרת | 1. לינארי | 1. מתקיים כי כל הע"ע הם 1 | 1. הגדרת |

לכן לכל מתקיים , לכן הוא אופרטור הזהות.

#### שאלה 4:

נמצא ע"ע וו"ע של .

מתקיים , לכן .

מתקיים .

כלומר , נציב ונקבל ומכאן ולכן .

לסיכום, הע"ע הם .

נמצא ו"ע עבור :

נקבל משוואה: , לכן .

כלומר, , לכן הו"ע הם .

עבור :

נקבל משוואה אחת: , לכן .

נקבל משוואה נוספת: , לכן , לכן .

כלומר, , לכן הו"ע הוא .

סימטרית, לכן ניתן לבנות בסיס א"נ מהו"ע שלה. נפעיל גרם-שמידט לקבלת בסיס א"נ מהו"ע של .

מתקיים , לכן .

מתקיים . נגדיר .

מתקיים , לכן .

מתקיים . נגדיר .

מתקיים , לכן .

קיבלנו בסיס א"נ .

לכן המטריצה תהיה המטריצה שעמודותיה הן איברי הבסיס , כלומר .

מתקיים , לכן , לכן אורתוגונלית.

כמו כן, .

מתקיים: .